Etude de la Fonction Maximale

20 janvier 2017

Notations et définitions
Dans tout ce qui suit, on note $L^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonction intégrables de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; lorsque $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\int_I f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ et $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f|$.

Soit f une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On appelle *fonction maximale* attachée à f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$M_f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(t)dt.$$

Cette fonction est à valeurs réelles dès que f est continue et bornée, ou encore dès que f est intégrable.

1 Premières propriétés

1.1 Etude de quelques exemples

Calculer M_f dans les cas suivants :
a. $f(x) = x$
b. $f(x) = |x|$
c. $f(x) = \cos^2 x$
d. $f(x) = 0$ si $|x| > 1$ et $f(x) = 1$ si $|x| \leq 1$.

1.2

On suppose f positive Montrer que, si f est strictement positive en l'un de ses points de continuité, il existe trois nombres réels a, b, c avec b et c strictement positifs tels que, pour tout nombre réel x, $M_f(x) \geq \frac{c}{|x-a|+b}$ et que de ce fait M_f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.3 Continuité de M_f

1) Soient X un espace métrique , et F une fonction continue de $X \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction ϕ définie sur X par $\phi(x) = \sup_{t\in[0,1]} F(x,t)$ est continue.

Soit h une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; on désigne désormais par μ_h (resp. ν_h) la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\mu_h(x) = \sup_{0<r\leq 1} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} h(t)dt$$

resp.

$$\nu_h(x) = \sup_{r\geq 1} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} h(t)dt$$

2) On suppose f continue et bornée.
a) Montrer que l'application F qui à $(x,r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ associe $F(x,r) = \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(t)dt$ et telle que $F(x,0) = f(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.
b) Montrer que les applications μ_f, ν_f et M_f sont bornées et continues.

3) On suppose f continue et intégrable.
a) Prouver qu'il existe une suite (g_p) de fonctions continues à supports compacts telle que $\|g_p - f\|_1$ tende vers 0.
b) Montrer que l'application ν_f est à valeurs réelles et continue.
c) En déduire que que Mf est continue.

2 L'inégalité L^1-faible pour la fonction maximale

Dans toute la partie II, la fonction f est continue, positive et intégrable. Lorsque U est un ouvert de $\mathbb{R}$, on note $\lambda(U)$ la somme des longueurs des composantes connexes de U, convenant que :
si l'une des composante connexe de U est non bornée, cette somme est $+\infty$;
si toutes les composantes connexes de U sont bornées, la somme est $+\infty$ si la série obtenue diverge, la somme ordinaire de la série si celle-ci converge.
1) Soit $I_1, \ldots, I_m$ une famille finie d'intervalles ouverts bornés. Montrer qu'il existe une partie finie P de $\{1, \ldots, m\}$ telle que :
i) les intervalles I_k, $k \in P$, sont deux à deux disjoints ;
ii) $\lambda(\cup_{k=1}^m I_k) \leq 3\sum_{l\in P} \lambda(I_l)$.
Soit s un nombre réel > 0.

2) a) Vérifier que $U_s = \{x \in \mathbb{R} | Mf(x) > s\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
b) On donne des segments $S_1, \ldots, S_n$ deux à deux disjoints contenus dans U_s. Montrer que l'on peut recouvrir $S_1 \cup \cdots \cup S_n$ par une famille finie d'intervalles ouverts bornés $I_1, \ldots, I_m$ vérifiant :

$$\forall p \in \{1 \ldots, m\},\ s\lambda(I_p) \leq \int_{I_p} f(t)dt.$$

c) Montrer que $s \sum_{i=1}^{n} \lambda(S_i) \leq 3\|f\|_1$.
d) Prouver que, pour tout $s > 0$, $\lambda(U_s)$ est fini et que l'on a

$$\lambda(U_s) \leq \frac{3\|f\|_1}{s}.$$

3 Convolution et prolongement harmonique

Etant donnés deux fonctions continues par morceaux f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et un nombre réel x, on note – lorsque l'intégration est justifiée – $f \star g(x)$ le nombre $\int_I f(t)g(x-t)dt$.

Dans toute cette partie, la fonction f est supposée continue.

3.1

Soit g une fonction de classe C^p de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ bornée ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre p. On suppose f intégrable. Montrer que $f \star g$ est de classe C^p.

3.2 Convergence des convolées.

a) On appelle *suite de Dirac* toute suite K_n de fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :
$D1$: les K_n sont continues et positives ;
$D2$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est intégrable et $\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(t)dt = 1$.
$D3$; Pour tout $\delta > 0$, la suite $\int_{|t|\geq\delta} K_n(t)dt$ tend vers 0.
Soit f une fonction continue bornée de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$. Montrer que la suite $K_n \star f$ converge uniformément vers f sur tout compact $X \subset \mathbb{R}$.

b) On suppose cette fois que f est intégrable et que la suite de fonctions $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $D1$, $D2$, $D3$ et : pour tout $\delta > 0$, la suite K_n tend uniformément vers 0 sur $\{x \in \mathbb{R} | |x| \geq \delta\}$. Montrer que la suite $K_n \star f$ converge uniformément vers f sur tout compact $X \subset \mathbb{R}$.

3.3 Fonctions harmoniques

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^2$. On dit que la fonction $g : \Omega \to \mathbf{C}, (x,r) \to g(x,r)$ est *harmonique* lorsque g possède des dérivées partielle continues jusqu'à l'ordre deux et que l'on a

$$\forall (x,r) \in \Omega^2, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = 0.$$

On pose, pour $r > 0$ et $x \in \mathbf{R}$: $K_r(x) = \frac{1}{\pi}\frac{r}{x^2+r^2}$.

a) On suppose f bornée. Montrer soigneusement que la fonction $(x,r) \mapsto K_r \star f(x)$ est harmonique dans le demi-plan supérieur $\mathbf{R}\times]0,+\infty[$. (le point (x_0, r_0) étant donné, on se placera sur un voisinage compact de celui-ci pour effectuer les dominations nécessaires).

b) On suppose f bornée. Montrer que la famille $r \mapsto (x \mapsto K_r * f(x))$ converge uniformément vers f sur les compacts de $\mathbf{R}$ lorsque r tend vers 0^+.
c) Montrer que les résultats de a) et b) subsistent si l'on suppose f intégrable, sans qu'elle soit nécessairement bornée.

4 Prolongement harmonique et fonction maximale

Pour toute fonction numérique ξ de la variable réelle et tout réel $r > 0$ on pose $\psi_r(x) = \frac{1}{r}\psi(\frac{x}{r})$.
Lorsque α est un réel > 0 on note $\chi_\alpha(x)$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$ et on désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs des fonctions (χ_α), $\alpha > 0$. Soit f une fonction positive intégrable sur $\mathbf{R}$.

4.1

Montrer que, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{E}$ et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sup_{r>0} f * \psi_r(x) \leq M_f(x) \int_I \psi.$$

4.2

Soit ϕ la fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $\phi(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
a) Montrer que ϕ est limite uniforme de fonctions de $\mathcal{E}$.

b) En déduire que

$$\sup_{r>0} f * \phi_r(x) \leq M_f(x) \int_I \phi.$$

4.3

Trouver deux constantes $C > 0$ et C' telles que l'on ait, pour tout x :

$$CM_f(x) \leq \sup_{r>0} K_r \star f(x) \leq C' M_f(x).$$

I

1) Pour tout $(x, r) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, $\left| \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f \right| \leq \|f\|_\infty$ donc Mf est bornée par $\|f\|_\infty$.

a. Si $f(x) = x$ il vient, pour tout $(x, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$,

$$\frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} t\,dt = \frac{2rx}{2r} = x$$

donc $Mf = f$.

b. Si $f(x) = |x|$ on a, pour $r > |x|$: $x + r > 0$, $x - r < 0$

d'où $\frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f = \frac{1}{2r} \left[\frac{(x+r)^2}{2} + \frac{(x-r)^2}{2} \right] \geq \frac{r}{2}$, $Mf(x) = +\infty$.

c. Avec $f(x) = \cos^2 x$ on obtient

$$\frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(t)\,dt = \frac{1}{4r} \times 2r + \frac{1}{2 \cdot 4r} \left(\sin 2(x+r) - \sin 2(x-r) \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin 2r}{2r} \right) \cos 2x$$

et comme, $\sup_{r > 0} \frac{\sin 2r}{2r} = 1$ il vient $\begin{cases} Mf(x) = \cos^2 x & \text{si } \cos 2x \geq 0 \\ Mf(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{[illegible]} & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

d. Si $-1 < x < 1$, $\frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f = 1$ tant que : $r \leq \min(|x-1|, |x+1|)$

et $\frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f < 1$ sinon, donc $M_f(x) = 1$. $\underbrace{\frac{1}{2} - \frac{x-1}{2r}}$

Si $x \geq 1$, $\frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f = 0$ si $x - r \geq 1$, $= \frac{1}{2r}(1 - (x-r))$ si $-1 \leq x - r \leq 1$

$= \frac{1}{2r}(x+1)$ si $x - r \leq -1$; $M_f(x) = \frac{1}{x+1}$

Si $x \leq -1$ $Mf(x) = \frac{1}{-x+1} = \frac{1}{|x|+1}$

2°) Si f est nulle en tous ses points de continuité, $Mf = 0$.

Sinon il existe des nombres réels $\alpha < \beta$, $\gamma > 0$ tels que :

$$\forall t \in [\alpha, \beta], \ f(t) \geq \gamma$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $r = |x - \alpha| + |\beta - \alpha|$ nous obtenons :

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|x-\alpha| + |\beta - \alpha|} \times \int_\alpha^\beta f = \frac{\gamma(\beta - \alpha)}{|x-\alpha| + |\beta - \alpha|}$$

d'où le résultat.

Mf, minorée par une fonction qui n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$, ne l'est pas non plus.

3°) On suit le feuille supplémentaire où cette question est détaillée.

3-1) • Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, convergeant vers $x \in X$. Par compacité de $[0,1]$ et continuité de F il existe $t_n \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, $t \in [0,1]$ tels que : $\forall n,\ F(x_n, t_n) = \phi(x_n)$ et $F(x,t) = \phi(t)$. On veut montrer que : $\phi(x_n) \to \phi(x)$ (?). Soit $\varepsilon > 0$, par continuité de F il existe $V \in \mathcal{V}(x,t)$ tel que : $\forall (y,\tau) \in V,\ F(y,\tau) \geq F(x,t) - \varepsilon = \phi(x) - \varepsilon$ (*)

donc, pour n assez grand : $\phi(x_n) \geq \phi(x_n, t) \geq \phi(x) - \varepsilon$.

• Soit l une valeur d'adhérence de $\phi(x_n)$: $l = \lim \phi(x_{\varphi(n)})$, $\varphi \nearrow$ (év. $l = +\infty$)

Quitte à extraire encore, nous pouvons supposer : $t_{\varphi(n)} \to \tau$.

Alors : $\phi(x_{\varphi(n)}) = F(x_{\varphi(n)}, t_{\varphi(n)}) \to F(x,\tau)$ et donc :

$l = F(x,\tau) \leq F(x,t) = \phi(x)$ (**) : avec (*) il vient $l = \phi(x)$: la seule valeur d'adhérence de $\phi(x_n)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $\phi(x)$ donc $\phi(x_n) \to \phi(x)$

$(x_0, 0)$: Comme f est continue, on est ramené à prouver :

$$\exists \lim_{\substack{(x,r)\to(x_0,0)\\ r>0}} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f = f(x_0).$$

Or : $\left|\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f - f(x_0)\right| \leq |f(x_0) - f(x)| + \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(t) - f(x_0)|\,dt$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall t, t' \in (x_0-\eta, x_0+\eta)$, $|f(t) - f(t')| \leq \varepsilon$

(Heine) d'où pour $\begin{cases} x \in [x_0 - \eta/2, x_0 + \eta/2] \\ 0 < r < \eta/2 \end{cases}$: $\int_{x-r}^{x+r} |f(t) - f(x_0)|\,dt \leq 2r\varepsilon$

Finalement, $\forall (x,r) \in [x_0 - \eta/2, x_0 + \eta/2] \times]0, \eta/2[$, $|F(x,r) - f(x_0)| \leq 2\varepsilon$ $\square$

b) μ_f est continue grâce à 2-a) et 1). Pour obtenir la continuité de ν_f on écrit, pour $r \geq 1$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\left|\frac{1}{2r}\left|\int_{x-r}^{x+r} f(t)\,dt - \int_{y-r}^{y+r} f(t)\,dt\right|\right| \leq \frac{1}{2r}\left|\int_{x-r}^{y-r} f\right| + \frac{1}{2r}\left|\int_{x+r}^{y+r} f\right| \text{ (Chasles)}$$

$$\leq \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \|f\|_\infty |y-x|$$

De là : $\forall r \geq 1$, $\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f \leq \frac{1}{2r}\int_{y-r}^{y+r} f + \|f\|_\infty |y-x|$

$$\leq \nu_f(y) + \|f\|_\infty |y-x|$$

et : $\nu_f(x) \leq \nu_f(y) + \|f\|_\infty |y-x|$

Par symétrie des rôles : $|\nu_f(x) - \nu_f(y)| \leq \|f\|_\infty |y-x|$

Enfin $M_f = \sup(\mu_f, \nu_f) = \frac{1}{2}(\mu_f + \nu_f + |\mu_f - \nu_f|)$ est C^0 $\square$

3) Soit (cours, savoir refaire) g_p une suite de fonctions continues à supports compacts telle que :

$$\|f - g_p\|_1 \to 0.$$

Soit $r \geq 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f - \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} g_p \right| \leq \frac{1}{2r} \|f - g_p\|_1 \leq \frac{1}{2} \|f - g_p\|_1$$

Comme ci-dessus, par passage légitime au sup :

$$|v_f(x) - v_{g_p}(x)| \leq \frac{1}{2} \|f - g_p\|_1$$

et :

$$\|v_f - v_{g_p}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f - g_p\|_1 \cdot (*)$$

Selon 2) les fonctions v_{g_p} sont continues, avec $(*)$ v_{g_p} converge uniformément vers v_f. v_f est C^0 ...

μ_f demeure continue, donc $M_f = \sup(\mu_f, v_f)$ l'est.

III L'inégalité L^1-faible.

1) On prend pour I_{ℓ_1} le plus grand des intervalles $I_1, \dots, I_m$ puis pour I_{ℓ_2} le plus grand des intervalles restant parmi ceux qui ne rencontre pas I_{ℓ_1}, etc.

Soit I_k un intervalle ne figurant pas dans la liste $(I_\ell)_{\ell \in P}$. Nécessairement, I_k rencontre l'un des I_ℓ (sinon I_k figure ds la liste)

Soit $p = \min\{\ell \in P \mid I_k \cap I_\ell \neq \phi\}$.

- Si la longueur $\lambda(I_k)$ est $> \lambda(I_\ell)$, I_k rencontrerait — par construction — un $I_{\ell'}$ avec $\ell' < \ell$ (sinon I_k remplace I_ℓ !

" donc : $\lambda(I_k) \leq \lambda(I_\ell)$ et $I_k \cap I_\ell \neq \phi$

$$I_k \subset J_k$$

où J_k est l'intervalle ouvert 3 fois plus long que I_ℓ et de même centre : $\lambda(I_k) \leq 3\lambda(I_\ell)$.

Finalement : $\bigcup_{k=1}^{m} I_k \subset \bigcup_{k=1}^{m} J_k$ ⎫ en éliminant

$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{m} I_k\right) \leq 3 \sum_{\ell \in P} \lambda(I_\ell)$ ⎭ les répétitions des J_k

2) a) D'après I, Mf est continue.

b) c) Pour tout $x \in K = S_1 \cup \dots \cup S_p$, on a : $Mf(x) > s$

donc : $(\exists r_x > 0)\left(\int_{x-r_x}^{x+r_x} f \geq 2 r s\right)$; les ouverts $]x - r_x, x + r_x[$ constituent un recouvrement ouvert de K compact.

On en extrait un sous-recouvrement fini $I_1, \dots, I_m$:

$I_k =]x_k - r_k, x_k + r_k[$, $r_k > 0$

Avec 1) On tire de ce recouvrement ouvert $(I_\ell)_{\ell \in P}$ deux à deux disjoints tels que : $\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{m} I_k\right) \leq 3 \sum_{\ell \in P} \lambda(I_\ell)$

puis : $$\sum_{\ell \in P} \lambda(I_\ell) = \sum_{\ell \in P} (2 r_\ell) < \frac{1}{s} \sum_{\ell \in P} \int_{x_\ell - r_\ell}^{x_\ell + r_\ell} f$$
$$< \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} f$$

la dernière inégalité provenant de ce que les (I_ℓ) sont deux à deux disjoints.

e) Un peu de travail montre que :

$$\sup_{K_i \subset U_s,\ \text{disjoints}} \sum_{i=1}^{n} \lambda(K_i) = \lambda(\overline{U_s}).$$

(On peut aussi user de méthodes fondées sur la convergence dominée).

De là, $\lambda(\overline{U_s}) \leq \dfrac{3\|f\|_1}{s}$ $\square$

III Convolution et prolongement harmonique

3.1 Par domination : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, |f(t) g(x-t)| \leq \|f\|_\infty |g(x-t)|$

$f * g$ est correctement définie, un changement de variable affine donne $f*g = g*f$ et l'on a :

$$\begin{cases} F(x,t) = f(x-t) g(t) \text{ est } C^0 \text{ à } t \text{ fixé, CPM à } x \text{ fixé.} \\ |F(x,t)| \leq \|f\|_\infty |g(t)| \text{ et } t \mapsto \|f\|_\infty |g(t)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Le théorème de continuité sous $\int$ s'applique : $f*g$ est continue.

3.2 X est contenu dans un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, et f est uniformément continue sur $[a-1,b+1]$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : $0 < \eta < 1$ et

$$\forall (s,t) \in [a-1,b+1]^2, |s-t| \leq \eta \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, il vient :

$$|f(x) - f*K_n(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(x-t)) K_n(t) \, dt \right|$$

Supposons $x \in X$ et coupons la dernière intégrale pour utiliser l'uniforme continuité nous obtenons :

$$|f(x) - f*K_n(x)| \leq \int_{-\eta}^{\eta} |f(x) - f(x-t)| \overbrace{K_n(t)}^{\geq 0 \text{ ESSENTIEL}} dt + 2\|f\|_\infty \int_{|t| \geq \eta} \overbrace{K_n(t)}^{\geq 0} dt$$

$$\leq \varepsilon \int_{-\eta}^{\eta} K_n + 2\|f\|_\infty \int_{|t| \geq \eta} K_n(t) \, dt$$

Choisissons N tel que : $\forall n \geq N, \int_{|t| \geq \eta} K_n \leq \varepsilon$, du fait que : $\int_{-\eta}^{\eta} K_n \leq \int_{\mathbb{R}} K_n = 1$ il vient :

$$|f(x) - f*K_n(x)| \leq 3\varepsilon \quad \square$$

3-a) Par définition

$$g(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + z^2} dt. \quad \text{Soit } \begin{cases} (x_0, z_0) \in \mathbb{R}^2 \\ z_0 > 0 \end{cases}, \text{ choisissons}$$

$$\begin{cases} \rho \text{ et } \rho' \text{ tels que : } \rho < r_0 < \rho' \\ a \text{ et } b \text{ tels que : } a < x_0 < b \end{cases}$$

et posons, $F(x,r,t) = \dfrac{f(t)}{(x-t)^2 + r^2}$. Clairement, F admet des dérivées partielles à tous ordres, continues en t, et continues en (x,r) à t fixé ; par exemple :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,r,t) = -\frac{2(x-t)f(t)r}{\left((x-t)^2 + r^2\right)^2}.$$

Pour tout $(x,r) \in [\rho,\rho'] \times [a,b]$,

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,r,t)\right| \leq \frac{2(|a|+|b|+|t|)\,\|f\|_\infty \rho'}{(\varphi(t)^2 + \rho^2)^2} = \psi(t).$$

où $\varphi(t) = d(t,[a,b])$; $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} t^2$.

Clairement, ψ est intégrable ; le théorème de dérivation sous $\int$ montre alors que

|| g possède la D.P continue en (x_0,r_0) :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,r_0) = -2\int_{\mathbb{R}} \frac{(x_0-t)f(t)r_0}{\left((x_0-t)^2 + r_0^2\right)^2}\,dt.$$

De même, g possède des DP jusqu'à l'ordre 2.

Un calcul simple (que j'ai déjà fait dix fois et pas envie de refaire une de plus) donne alors

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = 0.$$

b) Il suffit de montrer que $K_r : x \to \dfrac{1}{\pi}\dfrac{r}{x^2+r^2}$ vérifie

D_1, D_2, D_3, or : K_r est C^∞ et ≥ 0 ;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r}{x^2+r^2}\,dx = \left[\operatorname{Arctg}\frac{x}{r}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi \quad \text{d'où } D_2,$$

$$\text{et } \int_{|x|\geq\eta} \frac{r}{x^2+r^2}\,dx = 2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg}\frac{\eta}{r}\right) \underset{r\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \quad \text{d'où } (D_3).$$

IV

II - 1) Écrivons : $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_{\alpha_i}$, $\lambda_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$.
φ étant bornée et f intégrable $t \to f(x-t)\varphi(t) \in L^1(\mathbb{R})$.

Puis : $f * \varphi_r(x) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \chi_{\alpha_i}\left(\frac{t}{r}\right) dt$

$= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_{x-\alpha_i r}^{x+\alpha_i r} f(u)\,du$ (définition de χ_α)

$= \frac{\cancel{r}}{\cancel{r}} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\frac{1}{2\alpha_i r} \int_{x-\alpha_i r}^{x+\alpha_i r} f \right) 2\alpha_i$

$\leq Mf(x) \left(\sum_{i=1}^{m} 2\alpha_i \lambda_i \right) = Mf(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi$ $\square$

II - 2) a) vient de l'intégrabilité de f et du caractère borné de φ.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Construisons $\psi \in \mathcal{E}$ telle que $\|\varphi - \psi\|_\infty < \varepsilon$ ce qui amènera le résultat souhaité. Choisissons $M \geq 0$ tel que : $\forall x \in]-\infty, -M] \cup [M, +\infty[$, $|\varphi(x)| < \varepsilon$. Dès lors, si ψ est nulle pour $|x| \geq M$, $\|\varphi - \psi\|_{\infty, \{|x| \geq M\}} < \varepsilon$.

L'uniforme continuité montre que, pour n assez grand, la fonction en escalier φ_n définie sur $[0, M]$ par : $\varphi_n(0) = \varphi\left(\frac{M}{n}\right)$
$\forall k \in [\![0, n]\!]$ $\forall x \in \left]\frac{kM}{n}, \frac{(k+1)M}{n}\right]$, $\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{k+1}{n} M\right)$
vérifie $\|\varphi - \varphi_n\|_{\infty, [0,M]} < \varepsilon$.
On pose $\varphi_n(-x) = \varphi_n(x)$ pour $x \in [-M, 0]$.
Visiblement : $\forall x \in [-M, M]$, $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\varphi_n\left(\frac{kM}{n}\right) - \varphi_n\left(\frac{(k+1)M}{n}\right)\right) \chi_{\frac{kM}{n}}$
(avec $\varphi_n\left(\frac{n+1}{n} M\right) = 0$).
On pose $\psi = \varphi_n$ sur $[-M, M]$, $\psi = 0$ ailleurs ;
ψ convient. On note ψ_n la suite obtenue avec $\varepsilon = 1/n$

c) Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $r > 0$, $\varphi_{r,n}$ croît vers φ_r.

Donc $t \mapsto f(x-t)\varphi_{r,n}(t)$ est une suite de fonctions $\geqslant 0$ croissant vers la fonction intégrable $t \mapsto f(x-t)\varphi_r(t)$.

Le théorème de convergence dominée donne :

$$f * \varphi_r(x) = \lim_{n \to +\infty} f * \varphi_{r,n}(x)$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f * \varphi_{r,n}(x) \leqslant M_f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{r,n}$ où

l'intégrale du membre de droite tend, toujours pour les mêmes raisons, vers $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r \underset{u = \frac{t}{r}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi$

Finalement : $\sup_{r>0} \varphi_r * f(x) \leqslant \frac{\pi}{2} M_f(x)$

3°) On sait déjà que $C' = \frac{\pi}{2}$ convient.

D'autre part : $\frac{1}{2}\chi_1 \leqslant \varphi$ donc : $\forall r > 0$, $\frac{1}{2}\chi_{1,r} \leqslant \varphi_r$

et par suite : $M_f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{2} f * \chi_{\frac{1}{r}}(x) \leqslant \sup_{r>0} f * \varphi_r(x)$.

De là, $C = 1$ convient. $\square$